群的弱ホップ代数 (ホップ代数と量子群 : 応用の可能性)

AUTHOR(S):

林, 孝宏

数理解析研究所講究録
第 1840 巻 2013 年 109-121

群的弱ホップ代数

名古屋大学・多元数理科学研究科　林　孝宏
Takahiro Hayashi
Graduate School of Mathematics, Nagoya University
E-mail: hayashi@math.nagoya-u.ac.jp

1　概要

ホップ代数の重要な一般化として, G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi [2] により導入された弱ホップ代数というものがある. これは, 以前筆者が導入した面代数の一般化になっており, したがって, 勝手な有限半単純テンソル圏を弱ホップ代数の表現の圏として実現することが出来る.

本稿では、弱ホップ代数のうち, 群的元により張られ, かつ面代数であるようなものに着目し, その表現論等についての解説を行う.

2　弱ホップ代数　定義と例

$\mathcal{H}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の代数であって, 余代数の構造 $(\mathcal{H},\Delta,\varepsilon)$ を持つようなものとする. このとき $\mathcal{H}$ が弱双代数であるとは, 次が成り立つことをいう.

$$\Delta(xy)=\Delta(x)\Delta(y), \tag{2.1}$$

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1))=(\Delta(1)\otimes 1)(1\otimes\Delta(1))=(1\otimes\Delta(1))(\Delta(1)\otimes 1), \tag{2.2}$$

$$\varepsilon(xyz)=\varepsilon(xy_{(1)})\varepsilon(y_{(2)}z)=\varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z). \tag{2.3}$$

ただし, 余積に関する記号法 $\Delta(x)=x_{(1)}\otimes x_{(2)}$, $(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(x))=x_{(1)}\otimes x_{(2)}\otimes x_{(3)}$ を用いることとする. 弱双代数 $\mathcal{H}$ に対し, 線形写像 $S:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$

であって, 関係式

$$S(x_{(1)})x_{(2)} = \varepsilon_s(x), \qquad x_{(1)}S(x_{(2)}) = \varepsilon_t(x), \tag{2.4}$$

$$S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)}) = S(x) \tag{2.5}$$

を満たすものが存在するとき, S を $\mathcal{H}$ の対合射といい, $\mathcal{H}$ は弱ホップ代数であるという. ただし, $\varepsilon_t, \varepsilon_s \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は以下で定まる線形写像とする.

$$\varepsilon_t(x) = \varepsilon(1_{(1)}x)1_{(2)}, \qquad \varepsilon_s(x) = 1_{(1)}\varepsilon(x1_{(2)}). \tag{2.6}$$

例 2.1 X を有限集合とし, $\mathcal{F}(X) := \bigoplus_{x,y\in X} \mathbb{K}\, e^x_y$ を記号 e^x_y $(x, y \in X)$ を基底に持つ $(\#X)^2$ 次元のベクトル空間とする. $\mathcal{F}(X)$ は以下の演算により, 弱ホップ代数になる.

$$e^x_y e^z_w = \delta_{xz}\delta_{yw} e^x_y, \qquad 1_{\mathcal{F}(X)} = \sum_{x,y\in X} e^x_y,$$

$$\Delta(e^x_y) = \sum_{z\in X} e^x_z \otimes e^z_y, \qquad \varepsilon(e^x_y) = \delta_{xy}, \qquad S(e^x_y) = e^y_x.$$

$\#X \geq 2$ のときは, $\Delta(1) = \sum_{x,y,z} e^x_z \otimes e^z_y \neq \sum_{x,y,z,w} e^x_z \otimes e^w_y = 1 \otimes 1$ であるから, $\mathcal{F}(X)$ は双代数ではない.

例 2.2 G を有限群とし, X を有限右 G-集合とする. $\mathcal{F}(G, X) := \bigoplus_{x,y\in X} \bigoplus_{g\in G} \mathbb{K}\, e^x_y(g)$ は以下の演算により, 弱ホップ代数になる.

$$e^x_y(g)e^z_w(h) = \delta_{xg,z}\delta_{yg,w}\, e^x_y(gh), \tag{2.7}$$

$$\Delta(e^x_y(g)) = \sum_{z\in X} e^x_z(g) \otimes e^z_y(g), \qquad \varepsilon(e^x_y(g)) = \delta_{xy}, \tag{2.8}$$

$$S(e^x_y(g)) = e^{yg}_{xg}(g^{-1}). \tag{2.9}$$

例 2.3 G を有限群とし, X を有限右 G-集合とする. また, $\sigma \colon X \times G \times G \to \mathbb{K}^\times$; $(x, a, b) \mapsto \sigma_x(a, b)$ を関係式

$$\frac{\sigma_x(a,b)\sigma_x(ab,c)}{\sigma_y(a,b)\sigma_y(ab,c)} = \frac{\sigma_{xa}(b,c)\sigma_x(a,bc)}{\sigma_{ya}(b,c)\sigma_y(a,bc)}$$

をみたす写像とする. このとき, $\mathcal{F}(G, X, \sigma) := \bigoplus_{x,y\in X} \bigoplus_{g\in G} \mathbb{K}\, e^x_y(g)$ は, 前例と同じ余代数構造と次の積により, 弱ホップ代数になる.

$$e^x_y(g)e^z_w(h) = \delta_{xg,z}\delta_{yg,w}\, \frac{\sigma_x(g,h)}{\sigma_y(g,h)}\, e^x_y(gh).$$

注： N. Andruskiewitsch と S. Natale [1] は, ある種の double groupoid (二重圏の groupoid 版) から弱ホップ代数が構成されることを示している. 上記の例は, 彼らの弱ホップ代数の例になっている.

弱双代数 $\mathcal{H}$ の左加群 M, N に対し. $M \otimes N$ の部分空間 $M\bar{\otimes}N$ を

$$M\bar{\otimes}N := \mathrm{span}\{1_{(1)}m \otimes 1_{(2)}n \,|\, m \in M, n \in N\} \tag{2.10}$$

で定める. $M\bar{\otimes}N$ は $\mathcal{H}\otimes(M\otimes N) \to M\otimes N$; $h\otimes(m\otimes n) \mapsto h_{(1)}m \otimes h_{(2)}n$ の制限により, 左 $\mathcal{H}$-加群になる. また, 左 $\mathcal{H}$-加群の全体 ${}_{\mathcal{H}}\mathbf{Mod}$ は, この演算によりテンソル圏 (線形なモノイダル圏) になる. さらに, $\mathcal{H}$ が弱ホップ代数のときは, 有限次元左 $\mathcal{H}$-加群の全体 ${}_{\mathcal{H}}\mathbf{mod}$ は, $M \mapsto M^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ により, リジッドなテンソル圏になる. ただし, M^* への $\mathcal{H}$ の作用は $(hf)(m) = f(S(h)m) \quad (m \in M, f \in M^*, h \in \mathcal{H})$ で定める.

3 $\mathcal{F}(G, X, \sigma)$ の特徴付け

この節では, 前節の弱ホップ代数の例に対し, ホップ代数的な特徴付けを与えることを考える. まず, 弱双代数 $\mathcal{H}$ に対し,

$$\mathcal{H}_t = \varepsilon_t(\mathcal{H}), \qquad \mathcal{H}_s = \varepsilon_s(\mathcal{H}), \tag{3.1}$$

$$\mathcal{H}_{min} = \mathrm{span}\{\varphi\lambda \,|\, \varphi \in \mathcal{H}_t, \lambda \in \mathcal{H}_s\} \tag{3.2}$$

とおく. $\mathcal{H}_t, \mathcal{H}_s$ は $\mathcal{H}$ の部分代数, $\mathcal{H}_{min}$ は $\mathcal{H}$ の部分弱双代数になる. $\mathcal{H}_t$ が有限集合 X 上の関数環 $\mathbb{K}^X$ に同型であるときは, $\mathcal{H}$ は X-面代数であるという. 前節の弱双代数の例は, すべて X-面代数になっている.

例 3.1 $\mathcal{H}$ が X-面代数であるときは, $\mathcal{H}$ の元 e^x_y $(x, y \in X)$ であって例 2.1 の関係式を満たすものが存在し, $\mathcal{H}_{min} = \mathrm{span}\{e^x_y \,|\, x, y \in X\}$ となる. $\mathcal{H}$ が $\mathcal{F}(G, X)$ または $\mathcal{F}(G, X, \sigma)$ のときは, $e^x_y = e^x_y(1)$ とすればよい.

$\mathcal{H}$ の可逆元 a であって, 関係式

$$\Delta(a) = (a\otimes a)\Delta(1) = \Delta(1)(a\otimes a)$$

を満たすものを $\mathcal{H}$ の群的元とよぶ. 群的元の全体 $G(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ の乗法に関し群になる.

ホップ代数の場合とは異なり, $G(\mathcal{H})$ は一次独立とは限らず, $\dim \mathcal{H} < \infty$ であっても $\# G(\mathcal{H}) < \infty$ であるとは限らない.

例 3.2 $\mathcal{F}(X)$ を 例 2.1 の弱ホップ代数とするとき,

$$G(\mathcal{F}(X)) = \Big\{ \sum_{x,y} \frac{a_x}{a_y} e^x_y \ \Big| \ a_x \in \mathbb{K}^\times \quad (x \in X) \Big\}. \tag{3.3}$$

$G(\mathcal{H})$ は $G_{min}(\mathcal{H}) := \mathcal{H}_{min} \cap G(\mathcal{H})$ を正規部分群に持ち, 剰余群 $G_{red}(\mathcal{H}) := G(\mathcal{H})/G_{min}(\mathcal{H})$ が定まる.

$\mathcal{H}$ を弱双代数, G を群とする. また $\rightharpoonup: G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}; (g,a) \mapsto g \rightharpoonup a$, $\sigma: G \times G \to G(\mathcal{H})$ を写像とし, 以下の条件が成り立っているものとする.

各 g に対し, $a \mapsto g \rightharpoonup a$ は $\mathcal{H}$ から自身への代数射かつ余代数射. (3.4)

$$1 \rightharpoonup a = a, \tag{3.5}$$

$$\sigma(g,1) = \sigma(1,g) = 1, \tag{3.6}$$

$$(g \rightharpoonup \sigma(h,k))\sigma(g,hk) = \sigma(g,h)\sigma(gh,k), \tag{3.7}$$

$$(g \rightharpoonup (h \rightharpoonup a))\sigma(g,h) = \sigma(g,h)(gh \rightharpoonup a). \tag{3.8}$$

ただし, g, h, k は G の任意の元, a は $\mathcal{H}$ の任意の元とする.

このとき $\mathcal{H} \rtimes_\sigma \mathbb{K}G := \mathcal{H} \otimes \mathbb{K}G$ は以下の演算により弱双代数になる.

$$(a \otimes g)(b \otimes h) = a(g \rightharpoonup b)\sigma(g,h) \otimes gh, \tag{3.9}$$

$$\Delta(a \otimes g) = (a_{(1)} \otimes g) \otimes (a_{(2)} \otimes g), \quad \varepsilon(a \otimes g) = \varepsilon(a). \tag{3.10}$$

弱双代数 $\mathcal{H}$ に対し, $\mathcal{H}_{gl}$ を $G(\mathcal{H})$ によって張られる $\mathcal{H}$ の部分空間とする. $\mathcal{H}_{gl}$ は $\mathcal{H}$ の部分弱双代数になる.

定理 3.3 弱ホップ代数 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}_{gl} = \mathcal{H}$ をみたし, さらに $\mathcal{H}_{min}$ が余代数として単純であるようなものとする. このとき, 上記の条件をみたす写像 $\rightharpoonup: G_{red}(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}_{min} \to \mathcal{H}_{min}$, $\sigma: G_{red}(\mathcal{H}) \times G_{red}(\mathcal{H}) \to G(\mathcal{H}_{min})$ が定まり, 弱ホップ代数として

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_{min} \rtimes_\sigma \mathbb{K}G_{red}(\mathcal{H})$$

となる.

系 **3.4** 上記の定理でさらに $\mathcal{H}$ は X-面代数であるとする. このとき, 群 $G := G_{red}(\mathcal{H})$ の X への右作用が定まり, 弱ホップ代数として

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{F}(G, X, \sigma).$$

4 群論的テンソル圏

有限半単純なテンソル圏の重要な例として, Ostrik [12] により導入された群論的 (テンソル) 圏というものがある. 有限群 G の群環 $\mathbb{C}G$, $\mathbb{C}G$ のドリンフェルド二重構成 $D(G)$, $D(G)$ の捻れ版 $D^\omega(G)$ など, 多くの有限次元 (準) ホップ代数の表現の圏は, 群論的圏になる. この節では, 群論的圏と $\mathcal{F}(G, X, \sigma)$ との関係について簡単に説明する.

一般に, $\mathbf{C}$ をテンソル圏とし, $\mathbf{M}$ を左 $\mathbf{C}$-加群とする. ($\mathbf{M}$ はそれ自体線形圏で, 「作用」は関手 $\mathbf{C} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ によりあたえられる.) このとき, 関手 (と若干の付加構造) を対象とする圏 $\mathbf{End}_{\mathbf{C}}(\mathbf{M})$ が定まり, 関手の合成によりテンソル圏になる.

G を有限群, $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{C}^\times$ を正規化された 3-コサイクルとし, $\mathbf{Vec}_G^\omega$ を G により次数付けられた有限次元複素ベクトル空間の圏とする. $\mathbf{Vec}_G^\omega$ は, テンソル積 $(A \otimes B)_c := \bigoplus_{ab=c} A_a \otimes B_b$ と同型 $\omega(a, b, c)\mathrm{id}\colon (A_a \otimes B_b) \otimes C_c \cong A_a \otimes (B_b \otimes C_c)$ によりテンソル圏になる.

H を G の部分群とし, $\psi\colon H \times H \to \mathbb{C}^\times$ を $d\psi = \omega|_{H \times H \times H}$ をみたす写像とするとき, 左 $\mathbf{Vec}_G^\omega$-加群 $\mathbf{M}_{H,\psi}$ が定義され, したがってまたテンソル圏

$$\mathbf{C}(G, H, \omega, \psi) := \mathbf{End}_{\mathbf{Vec}_G^\omega}(\mathbf{M}_{H,\psi})$$

が定まる. $\mathbf{C}(G, H, \omega, \psi)$ (と同値なテンソル圏) を群論的圏と呼ぶ.

注：コサイクルが自明な場合, $\mathbf{C}(G, H, \omega, \psi)$ は, 幸崎氏と山上氏により導入された同変ベクトルバンドルのなすテンソル圏に同値である (文献 [8] 参照).

$X = H \backslash G$ とし, 各 $x \in X$, $a, b \in G$ に対し

$$\sigma_x(a, b) = \frac{\omega(t_x a t_{xa}^{-1}, t_{xa}, b)}{\omega(t_x a t_{xa}^{-1}, t_{xa} b t_{xab}^{-1}, t_{xab})\omega(t_x, a, b)\psi(t_x a t_{xa}^{-1}, t_{xa} b, t_{xab}^{-1})}$$

とおく. ただし, 各 $x \in X$ に対し, $t_x \in G$ はその代表元, すなわち, $t_x G = x$ をみたす元とする.

定理 4.1 $\mathbf{C}(G, H, \omega, \psi)$ はテンソル圏として, 有限次元右 $\mathcal{F}(G, X, \sigma)$-加群の圏と同値になる.

J. M. Mombelli と Natale [10] は, Andruskiewitsch と Natale の弱ホップ代数たちの一部に対し, それらの表現の圏が群論的圏であることを示している. 上記の定理は, この結果の特別な場合である.

5 コサイクルの自明化

この節では, 例 2.3 の面代数の表現論に関する問題 (融合則や後述するフロベニウス・シュアー不変量の計算など) が, ある程度例 2.2 の代数の問題に帰着できることを説明したい. G, X, σ は例 2.3 と同じとする. $c = \sum_{x,y \in X} c_{xy} e^x_y \in \mathcal{F}(X)$, $g \in G$ に対し, $c \rtimes g = \sum_{x,y \in X} c_{xy} e^x_y(g) \in \mathcal{F}(G, X, \sigma)$ とおく. また, $g, h \in G$ に対し $\sigma(g,h) = \sum_{x,y \in X} \frac{\sigma_x(g,h)}{\sigma_y(g,h)} e^x_y \in \mathcal{F}(X)$ とおく. $\sigma(-,-)$ は $G(\mathcal{F}(X))$ に値をもつ G 上の 2-コサイクルになる.

補題 5.1 $\mathbb{K}$ は代数閉体であるとする. このとき, 2-コサイクル τ と自然数 $n \geq 1$ を $\mathcal{F}(G, X, \sigma) \cong \mathcal{F}(G, X, \tau)$ かつ

$$\tau(g,h)^n = 1 \quad (\forall g, h \in G) \tag{5.1}$$

となるようにとることができる.

以下, $\sigma = \tau$ は, 最初から上記の補題の条件を満たしているものとする. このとき, $G(\mathcal{F}(X))$ の有限部分群 A_σ と $\mathcal{F}(G, X)^\times$ の有限部分群 G_σ が

$$A_\sigma = \langle \sigma(g,h) \,|\, g, h \in G \rangle, \tag{5.2}$$

$$G_\sigma = \{ a \rtimes g \,|\, a \in A_\sigma,\ g \in G \} \tag{5.3}$$

により定まり,

$$1 \longrightarrow A_\sigma \xrightarrow{\iota} G_\sigma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \tag{5.4}$$

は群の完全列になる．ただし，$\iota(a) = a \rtimes 1$, $\pi(a \rtimes g) = g$ とする．G_σ は π により X に作用するから, 面代数 $\mathcal{F}(G_\sigma, X)$ が定義される．左 $\mathcal{F}(G_\sigma, X)$-加群 M であって関係式

$$(\sigma(g,h) \rtimes 1_{G_\sigma})m = (1_{\mathcal{F}(X)} \rtimes (\sigma(g,h) \rtimes 1_G))m \quad (\forall g, h \in G, \forall m \in M)$$

をみたすものの全体のなす圏を $\mathbf{M}$ とする．$\mathbf{M}$ は左 $\mathcal{F}(G_\sigma, X)$-加群のなす圏 ${}_{\mathcal{F}(G_\sigma,X)}\mathbf{Mod}$ の部分テンソル圏になる.

定理 5.2 左 $\mathcal{F}(G, X, \sigma)$-加群の圏は上記の $\mathbf{M}$ とテンソル圏として同値.

6 群的弱面代数の表現

この節以降は, 体 $\mathbb{K}$ は複素数体 $\mathbb{C}$ であるとする．M を X-面代数 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G, X)$ の左加群とする．M は線形空間として

$$M = \bigoplus_{x,y \in X} M_y^x, \quad M_y^x := e_y^x M \tag{6.1}$$

と分解する．ただし $e_y^x := e_y^x(1)$ とする．また M は 加群としての直和分解

$$M = \bigoplus_{\Omega \in (X \times X)/\Delta(G)} M(\Omega), \qquad M(\Omega) := \bigoplus_{(x,y) \in \Omega} M_y^x \tag{6.2}$$

をもつ．ただし，$\Delta(G) := \{(g,g) \,|\, g \in G\}$ とする．置換群論に倣い $(X \times X)/\Delta(G)$ の元をオービタルと呼び, 分解 (6.2) をオービタル分解と呼ぶ．また, $M = M(\Omega)$ であるとき, M は型 Ω を持つという．$\Delta(X) \in (X \times X)/\Delta(G)$ を対角オービタルと呼び, それ以外のオービタルを非対角オービタルとよぶ.

$x \in X$ に対し, $G_x := \{g \in g \,|\, xg = x\}$ とし, $\Omega \in (X \times X)/\Delta(G)$, $\omega = (x,y) \in \Omega$ に対し, $G_\omega = G_{x,y} := G_x \cap G_y$ とおく．左 $\mathbb{C}G_\omega$-加群 V に対し $I_\omega(V) := \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_\omega} V$ は

$$e_v^u(g)(g' \otimes_{\mathbb{C}G_\omega} v) = \delta_{\omega,(u,v)gg'}\, gg' \otimes_{\mathbb{C}G_\omega} v$$

により 左 $\mathcal{F}$-加群になる．この対応により, 左 $\mathbb{C}G_\omega$-加群の圏 ${}_{\mathbb{C}G_\omega}\mathbf{Mod}$ と型 Ω の $\mathcal{F}$-加群の圏 ${}_{\mathcal{F}}\mathbf{Mod}(\Omega)$ は同値になる.

対角オービタルを型にもつ $\mathcal{F}$-加群の全体 ${}_{\mathcal{F}}\mathbf{Mod}(\Delta(X))$ は, ${}_{\mathcal{F}}\mathbf{Mod}$ の部分テンソル圏になり, ${}_{\mathbb{C}G_x}\mathbf{Mod}$ とテンソル圏として同値になる. したがって非対角オービタルを型にもつ加群が主な考察の対象となる.

Kosaki-Munemasa-Yamagami [7] は, 同変ベクトルバンドルの描像を用いて次を示した.

定理 6.1 各 $x, y, z \in X$, $\mathbb{C}G_{x,y}$-加群 U, $\mathbb{C}G_{y,z}$-加群 V に対し,

$$I_{(x,y)}(U)\bar{\otimes}I_{(y,z)}(V) \cong \bigoplus_{t\in T} I_{(x,tz)}\left(\left((U\otimes {}^tV)|_{G_{x,y,tz}}\right)^{G_{x,tz}}\right),$$

ただし, T は $G_y = \coprod_{t\in T} G_{x,y}tG_{y,z}$ をみたす G_y の部分集合とする. また, $G_{x,y,z} = G_x \cap G_y \cap G_z$ とし, $(-)|_{G_{x,y,tz}}$, $(-)^{G_{x,tz}}$ はそれぞれ加群の制限, 誘導を表すものとする.

$I_{(x,y)}(U)$ は $\mathbb{C}G$-加群としては, 誘導加群に他ならないから, この定理は, マッキーのテンソル積定理から容易に導くことが出来る.

7 フロベニウス・シュアー不変量

文献 [11] に於いて Ng と Schauenburg は pivotal なテンソル圏 $\mathbf{C}$ の各対象 M に対し, フロベニウス・シュアー (FS) 不変量と呼ばれるスカラー値の不変量 $\nu_r(M)$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ を定義した. FS 不変量は, 加法性

$$\nu_r(M \oplus N) = \nu_r(M) + \nu_r(N)$$

をもち, 値は円分体の整数になる. $\mathbf{C}$ が有限群 G の通常表現の圏の場合, FS 不変量は, G の根数関数

$$R_G^r(a) := \#\{g \in G \mid g^r = a\} \quad (a \in G) \tag{7.1}$$

と密接な関係がある. すなわち $\{L_i\}$ を単純 $\mathbb{C}G$-加群の代表系とするとき, 関係式

$$R_G^r(a) = \sum_i \nu_r(L_i)\,\mathrm{Tr}_{L_i}(a) \tag{7.2}$$

が成り立つ. $\mathcal{F}(G, X)$-加群を考察すれば, この結果を精密化することができる.

H を G の部分群とし $X = H\backslash G$ とする. ${}_{\mathcal{F}(G,X)}\mathbf{mod}$ は pivotal なテンソル圏であり, したがってその各対象 M に対し, $\nu_r(M)$ が定まる.

定理 7.1 各 $x, y \in X$ と $\mathbb{C}G_{x,y}$-加群 V に対し,

$$\nu_r(I_{(x,y)}(V)) = \frac{1}{\# G_{x,y}} \sum_{g \in G(x,y;r)} \mathrm{Tr}_V(g^r),$$

ただし $G(x, y; r) = \{g \in G \mid xg = y,\ xg^r = x\}$.

定理 7.2 各 $h \in H,\ r > 0,\ y = bH \in X$ に対し,

$$\begin{aligned} &\#\{g \in bH \mid g^r = h\} \\ &= \begin{cases} \sum_i \nu_r(I_{(x,y)}(V_i)) \, \mathrm{Tr}_{V_i}(h) & (yh = y) \\ 0 & (yh \neq y). \end{cases} \end{aligned} \tag{7.3}$$

ただし $x = H \in X$ とし, $\{V_i\}$ は単純左 $\mathbb{C}G_{x,y}$-加群の代表系とする.

8 対称群

一般に有限群 G と $G = HK,\ H \cap K = \{1\}$ をみたす部分群 $H, K \leq G$ に対し, 有限次元ホップ代数 $\mathbb{C}^K \sharp \mathbb{C}H$ が定義され, その表現の圏は群論的圏になる. S. Montgomery たちは, G が n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ で $H = \mathfrak{S}_{n-1}$, $K = \langle (1, 2, \ldots, n) \rangle$ のときに, $\mathbb{C}^K \sharp \mathbb{C}H$ の単純加群を分類し, 各単純加群 M に対して $\nu_2(M) = 1$ を示した (文献 [5]). ${}_{\mathbb{C}^K \sharp \mathbb{C}H}\mathbf{mod}$ の代わりに, それと同値である ${}_{\mathcal{F}(\mathfrak{S}_n, X)}\mathbf{mod}$ を考察すれば, 一般の $r > 0$ に対し $\nu_r(M)$ を計算することが出来る. ここで X は n 元集合 $\{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n}\}$ である. $\mathcal{F}(\mathfrak{S}_n, X)$ のほうが $\mathbb{C}^K \sharp \mathbb{C}H$ よりも扱いやすいことは, 余加群の圏 $\mathbf{comod}_{\mathcal{F}(\mathfrak{S}_n, X)} \cong \mathbf{Vec}^1_G$ が $\mathbf{comod}_{\mathbb{C}^K \sharp \mathbb{C}H}$ よりも単純であることに原因があると考えられる.

$G = \mathfrak{S}_n$ の X への作用は, ただ一つの非対角オービタル $\Omega = (\overline{n-1}, \overline{n})\Delta(G)$ を持ち, $G_{\overline{n}} = H = \mathfrak{S}_{n-1}$, $G_{\overline{n-1}, \overline{n}} = \mathfrak{S}_{n-2}$ である. Y_n をサイズ n のヤング図形の全体とし, 各 $\lambda \in Y_n$ に対し, 対応する単純 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-加群を $V(\lambda)$ とする. $\lambda \in Y_{n-1}$, $\alpha \in Y_{n-2}$ に対し, それぞれ $L(\lambda) = I_{(\overline{n}, \overline{n})}(V(\lambda))$, $L(\alpha) = I_{(\overline{n-1}, \overline{n})}(V(\alpha))$ とおけば, $\{L(\lambda) \mid \lambda \in Y_{n-1}\}$ は対角型単純 $\mathcal{F}(G, X)$-加群の代表系になり, $\{L(\alpha) \mid \alpha \in Y_{n-2}\}$ は型 Ω の単純 $\mathcal{F}(G, X)$-加群の代表系になる. $\lambda \in Y_{n-1}, \alpha, \beta \in Y_{n-2}$ とするとき, 次の融合則 (テンソル積の分解

則) が成り立つ.

$$[L(\lambda)][L(\beta)] = [L(\beta)][L(\lambda)] = \sum_{\gamma \in Y_{n-2}} \sum_{\alpha \in \lambda^-} N^{\gamma}_{\alpha,\beta}[L(\gamma)], \tag{8.1}$$

$$[L(\alpha)][L(\beta)] = \sum_{\nu \in Y_{n-1}} \sum_{\gamma \in \nu^-} N^{\gamma}_{\alpha,\beta}[L(\nu)] + \sum_{\gamma \in Y_{n-2}} \sum_{\substack{\zeta \in \alpha^-, \eta \in \beta^-, \\ \theta \in \gamma^-}} N^{\theta}_{\zeta,\eta}[L(\gamma)]. \tag{8.2}$$

ただし, $[V(\alpha)][V(\beta)] = \sum_\gamma N^{\gamma}_{\alpha,\beta}[V(\gamma)]$ とし, λ^- は λ から箱を一つ除いてできるヤング図形の集合とする.

注： 幸崎氏と山上氏は, [8]に於いて, ${}_{\mathcal{F}(\mathfrak{S}_n,X)}\mathbf{mod}$ に対応する部分因子環の主グラフを求めている.

定理 8.1 各 $\alpha \in Y_{n-2}$ に対し, 非対角型加群 $L(\alpha)$ のフロベニウス・シュアー不変量は

$$\nu_r(L(\alpha)) = \sum_{2 \le s \le n;\ s|r} \nu_r(V(\alpha)|_{\mathfrak{S}_{n-s}})$$

で与えられる. ただし, $\nu_r(V(\alpha)|_{\mathfrak{S}_0}) = \dim V(\alpha)$ とする.

この結果から, 例えば, 対称群の 1 の冪根の個数に関する次の関係式を得ることができる.

$$R^r_{\mathfrak{S}_n}(1) = \sum_{1 \le s \le n;\ s|r} \frac{(n-1)!}{(n-s)!} R^r_{\mathfrak{S}_{n-s}}(1). \tag{8.3}$$

系 8.2 $\mathfrak{S}_{n-2}$ 上の関数 $\acute{R}^r_{\mathfrak{S}_n} : a \mapsto \#\{g \in (n-1,n)\mathfrak{S}_{n-1} \mid g^r = a\}$ は, $\mathfrak{S}_{n-2}$ のある表現の指標になる. また,

$$\acute{R}^r_{\mathfrak{S}_n}(a) = \sum_{2 \le s \le n;\ s|r} \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_{n-2}}_{\mathfrak{S}_{n-s}}(R^r_{\mathfrak{S}_{n-s}})(a). \tag{8.4}$$

系 8.3 各 $r > 0$ と $b \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{S}_{n-1}$ に対し,

$$\#\{g \in b\mathfrak{S}_{n-1} \mid g^r = 1\} = \sum_{2 \le s \le n;\ s|r} \frac{(n-2)!}{(n-s)!} R^r_{\mathfrak{S}_{n-s}}(1). \tag{8.5}$$

9 正準三角構造

この節では, Lu-Yan-Zhu [9] による, ホップ代数 $\mathbb{C}^K \sharp \mathbb{C}H$ 上の正準三角構造の分類定理の類似が, $\mathcal{F}(G,X)$ についても成り立つことを紹介する.

$\mathcal{H}$ を弱双代数, $\mathcal{R}^+, \mathcal{R}^- \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ とする. このとき, $(\mathcal{H}, \mathcal{R}^+, \mathcal{R}^-)$ が準三角弱双代数(または, $\mathcal{R}^\pm$ が $\mathcal{H}$ の準三角構造) であるとは, 次が成り立つことをいう.

$$\mathcal{R}^+\Delta(1) = \mathcal{R}^+, \quad \Delta(1)\mathcal{R}^- = \mathcal{R}^-, \tag{9.1}$$

$$\mathcal{R}^-\mathcal{R}^+ = \Delta(1), \quad \mathcal{R}^+\mathcal{R}^- = (\Delta^{\mathrm{op}})(1), \tag{9.2}$$

$$\mathcal{R}^+\Delta(a)\mathcal{R}^- = \Delta^{\mathrm{op}}(a) \quad (a \in \mathcal{H}), \tag{9.3}$$

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})(\mathcal{R}^+) = \mathcal{R}^+_{13}\mathcal{R}^+_{23}, \quad (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\mathcal{R}^+) = \mathcal{R}^+_{13}\mathcal{R}^+_{12}. \tag{9.4}$$

B を $\mathcal{H}$ の基底とするとき, $\mathcal{R}^\pm$ が B に関し正であるとは, $\mathcal{R}^\pm$ が $b\otimes c$ $(b, c \in B)$ の非負係数の一次結合であることをいう.

G を有限群, H をその部分群, $X = H\backslash G$, $x_0 := H \in X$ とする. また $s, t\colon X \to G$ を写像とする. 次が成り立つとき, 組 (s,t) は (G,H) の **matched pair of sections** であるという.

$$x_0 s(x) = x = x_0 t(x), \tag{9.5}$$

$$s(xg)^{-1}s(yg) = g^{-1}s(x)^{-1}s(y)g, \quad t(xg)^{-1}t(yg) = g^{-1}t(x)^{-1}t(y)g, \tag{9.6}$$

$$s(x)t(y) = t(y)s(x), \tag{9.7}$$

$$s(x_0) = 1 = t(x_0). \tag{9.8}$$

このとき X は $x * y := xs(y) = yt(x)$ により, 群になる.

補題 9.1 (s,t) を (G,H) の matched pair of sections とし, $c\colon X\times X \to \mathbb{C}^\times$ を, 各 $x, y, z \in X$, $h \in H$ に対し

$$c(x*y, z) = c(x,z)c(y,z), \tag{9.9}$$

$$c(x, y*z) = c(x,y)c(x,z), \tag{9.10}$$

$$c(xh, yh) = c(x,y) \tag{9.11}$$

を満たす写像とする. このとき $\mathcal{F}(G,X)$ は

$$R^+_{s,t,c} := \sum_{x,y,z\in X} c(x*z^{-1}, y*z^{-1})\ e^z_y(s(z)^{-1}s(x)) \otimes e^x_z(t(z)^{-1}t(y)),$$

$$R^-_{s,t,c} := \sum_{x,y,z\in X} c(y*z^{-1}, x*z^{-1})^{-1}\ e^x_z(s(z)^{-1}s(y)) \otimes e^z_y(t(z)^{-1}t(x))$$

により, 準三角弱双代数になる.

定理 9.2 $\mathcal{F}(G,X)$ の基底 $\{e^x_y(g)\}$ に関する正準三角構造の全体は，

$$\{\mathcal{R}^{\pm}_{s,t,1} \mid (s,t) \text{ は } (G,H) \text{ の matched pair of sections}\}$$

で与えられる．

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch and S. Natale, Tensor categories attached to double groupoids, Adv. in Math. 200 (2006) 539-583.

[2] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra 221 (1999) 385-438.

[3] Curtis, C. W., Reiner, I.: Methods of representation theory. Vol. I. With applications to finite groups and orders. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York (1981)

[4] T. Hayashi, Equivariant vector bundles and weak Hopf algebras, 準備中

[5] A Jedwab and S. Montgomery, Representations of some Hopf slgebras associated to the symmetric group S_n, Algebr Represent Theor (2009) 12:1-17

[6] Y. Kashina, G. Mason, and S. Montgomery. Computing the Frobenius-Schur indicator for abelian extensions of Hopf algebras. J. Algebra, 251(2):888-913, 2002.

[7] H. Kosaki, A. Munemasa and S. Yamagami, On fusion algebras associated to finite group actions, Pacific J. Math. 177 (1997), no. 2, 269-290.

[8] H. Kosaki and S. Yamagami, Irreducible bimodules associated with crossed product algebras. Internat. J. Math. 3 (1992), no. 5, 661-676.

[9] J.-H. Lu, M. Yan and Y.-C. Zhu, Quasi-triangular structures on Hopf algebras with positive bases, in New Trends in Hopf Algebra Theory, Contemp. Math. 267 (2000) 339-356.

[10] J. M. Mombelli and S. Natale, Tensor categories and vacant double groupoids, arXiv:0509052[math.QA].

[11] S.-H. Ng and P. Schauenburg. Higher Frobenius-Schur indicators for pivotal categories. In Hopf algebras and generalizations, volume 441 of Contemp. Math., pages 63-90. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[12] V. Ostrik, Module categories over the Drinfeld double of a finite Group, IMRN 27 (2003), 1507-1520.